×I50× E.N.S.I.E.T.A. I977

DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

M A T H E M A T I Q U E S

Durée : 4 heures

lère épreuve

Les quatre parties de l'épreuve sont indépendantes

1ère partie

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 1 ; a, b et x sont des réels, a est strictement inférieur à b .

On considère la famille F_n de polynômes à une indéterminée x

$$F_n = \left\{ P_{n,o} \ \ldots \ P_{n,k} \ \ldots \ P_{n,n} \right\}$$

$$P_{n,o}(x) = (x - a)^n \quad \therefore \quad P_{n,k}(x) = (x - a)^{n-k} \ (b - x)^k \ \ldots$$

$$P_{n,n}(x) = (b - x)^n$$

$$k \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

I.1 - Combien le graphe de $P_{n,k}$ possède-t-il de tangentes parallèles à $x'ox$?

I.2 - Les axes étant orthogonaux, comparer les graphes de $P_{n,k}$ et de $P_{n,n-k}$

.../...

I.3 - Calculer le maximum $M_{n,k}$ de $P_{n,k}$ pour $a \leq x \leq b$.

Quel est le plus grand des $M_{n,k}$ lorsque a, b et n étant fixes, k prend toutes les valeurs entières de 0 à n ?

I.4 - Etudier les variations de la fonction φ

$u \in \mathbb{R} \quad \varphi(u) = u^u \ (1 - u)^{1-u}$

Quel est le plus petit des $M_{n,k}$ lorsque, a, b et n étant fixes k, prend toutes les valeurs entières de 1 à $n-1$?

(Ici on suppose $n \geq 2$)

En déduire l'expression de $m_n = \underset{0 \leq k \leq n}{Inf} \ M_{n,k}$

I.5 - Etudier la limite de m_n quand n tend vers l'infini.

N.B - Toute expression de m_n obtenue par une méthode autre que celle indiquée dans le texte sera admise.

2ème partie

Calculer une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \varphi(u)\, du$ par la méthode des trapèzes, en partageant le segment [0 , 1] en dix parties égales; φ étant la fonction définie en I.4

3ème partie

III.1 - On appelle $K_n(x)$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieur ou égal à n et f l'application qui, à un polynôme P de $K_n(x)$ associe le polynôme $f(P)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left[f(P)\right](x) = (x - a)\ (b - x)\ P'(x) + nx \ P(x)$$

P' est la dérivée de P

Montrer que f est un endomorphisme de $K_n(x)$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de cet endomorphisme.

.../...

III.2 - Justifier l'existence et l'unicité du système de réels

$(\lambda_k^o \ldots \lambda_k^i \ldots \lambda_k^n)$

indépendants de x tel que :

$$x^k = \lambda_k^o \, P_{n,o}(x) + .. + \lambda_k^i \, P_{n,i}(x) + .. + \lambda_k^n \, P_{n,n}(x) \qquad 0 \leq k \leq n$$

On se propose de calculer les coefficients λ_k^i

Pour cela, on commence par déterminer 4 réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ indépendants de x tels que :

$$\begin{cases} x = \alpha \, (x - a) + \beta (b - x) \\ 1 = \gamma \, (x - a) + \delta (b - x) \end{cases}$$

et on remarque que : $x^k = x^k \cdot 1^{n-k}$

On vérifiera que :

$$x^n = \frac{1}{(b-a)^n} \left[b^n \, P_{n,o}(x) + .. + C_n^i \, b^{n-i} \, a^i \, P_{n,i}(x) + .. + a^n P_{n,n}(x) \right]$$

III.3 - Calculer le déterminant de la matrice de la famille F_n dans la base canonique $\{ 1 \ldots x^k \ldots x^n \}$

4ème partie

On propose un mode de calcul des intégrales $I_k = \int_a^b P_{n,k}(x) \, dx$ qui n'utilise ni décomposition de $P_{n,k}$ en somme de monômes, ni intégration par parties.

Montrer qu'on peut écrire

$$I_k = (b-a)^{n+1} \, J_k \qquad J_k = \int_0^1 t^{n-k} \, (1-t)^k \, dt$$

Trouver une relation entre les I_k en se servant de la formule donnée à la fin du III.2.

En déduire une relation entre les J_k; calculer J_k puis I_k .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail